

Zur Lösung der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung bei nicht-verschwindendem Gesamtimpuls I

Von DALLAS T. HAYES

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen
(Z. Naturforschg. 18 a, 531—538 [1963]; eingegangen am 12. Dezember 1962)

Localized solutions of the BETHE-GOLDSTONE equation for two nucleons in nuclear matter are examined as a function of the center-of-mass momentum (c. m. m.) of the two nucleons. The equation depends upon the c. m. m. as parameter due to the dependence upon the c. m. m. of the projection operator appearing in the equation. An analytical solution of the equation is obtained for a non-local but separable potential, whereby a numerical solution is also obtained. An approximate solution for small c. m. m. is calculated for a square-well potential. In the range of the approximation the two analytical solutions agree exactly.

In BRUECKNERS¹ Theorie des Viel-Nukleonen-Problems (speziell von Kernmaterie) spielt die sogenannte *t*-Matrix oder *K*-Matrix eine zentrale Rolle. Die Berechnung dieser Matrix kann ersetzt werden durch die Lösung der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung (B.G.Gl.)²

$$(h_0 - \varepsilon) \Psi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -\frac{\mathcal{P}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{(2\pi)^6} \quad (1)$$

$$\cdot \int \int d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}'_2 \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | v | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle \Psi(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2).$$

In dieser Gleichung, die im Impulsraum geschrieben wurde, bedeutet $\Psi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ die gesuchte Wellenfunktion zweier Nukleonen, zwischen denen das Zwei-Nukleonen-Potential v wirkt. h_0 ist der HAMILTON-Operator der wechselwirkungsfreien Bewegung der beiden Nukleonen. Er besteht aus einem kinetischen Energie-Anteil und einem von den übrigen Nukleonen erzeugten Ein-Teilchen-Potential. $\mathcal{P}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ ist ein Projektionsoperator, der alle Zustände der freien Nukleonen innerhalb der FERMI-Kugel fortprojiziert; in der hier gewählten Darstellung im Impulsraum ist $\mathcal{P}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ einfach eine Funktion, die nur die Werte 0 und 1 annimmt. Die Gleichung beschreibt in einem gewissen Sinne die Begegnung zweier Nukleonen in Kernmaterie, indem durch den Projektionsoperator $\mathcal{P}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ das Erreichen von Zuständen, die durch andere Nukleonen bereits besetzt sind, unmöglich gemacht wird.

BRUECKNERS Näherung (bzw. das damit gleichwertige Modell unabhängiger Paare³) bricht zusammen, wenn die B.G.Gl. außer Streulösungen auch lokalisierte, d. h. bezüglich der Relativkoordinaten bzw. Relativimpulse normierbare Lösungen besitzt. Auf derartige lokalisierte Zustände wurde zuerst in etwas anderem Zusammenhang durch COOPER⁴ hingewiesen (COOPER-Paare); in Zusammenhang mit der BRUECKNERSchen Theorie wurde die Frage lokalisierte Lösungen von mehreren Verfassern^{5—8} untersucht. Trotz des Zusammenbrechens der BRUECKNERSchen Näherung gilt das Auftreten lokalisierte Lösungen als Hinweis darauf, daß gebundene Paare im Grundzustand des Viel-Nukleonen-Problems eine entscheidende Rolle spielen; in der mathematischen Theorie der Supraleitung werden die gebundenen Paare systematisch berücksichtigt.

Die Lösungen der B.G.Gl. können wegen der Translationsinvarianz der Wechselwirkung als Eigenfunktionen des Gesamtimpulses gewählt werden. In der veröffentlichten Literatur wurden lokalisierte Lösungen bisher nur für verschwindenden Gesamtimpuls untersucht. EMERY⁸ zeigt die Existenz einer Lösung für das GAMMEL-THALER-Potential⁹, ohne den Eigenwert auszurechnen, während es BRENIG¹⁰ gelang, die Größe des Eigenwertes für ein Kastenpotential und für ein Kastenpotential mit „hard-core“ auszurechnen. In einer Arbeit von

¹ K. A. BRUECKNER, Theory of Nuclear Structure, The Many Body Problem, Dunod, Paris 1959.

² H. A. BETHE u. J. GOLDSTONE, Proc. Roy. Soc., Lond. A **238**, 551 [1957].

³ L. C. GOMES, J. D. WALECKA u. V. F. WEISSKOPF, Ann. Phys., New York **3**, 241 [1958].

⁴ L. N. COOPER, Phys. Rev. **104**, 1189 [1956].

⁵ K. GOTTFRIED, An Inconsistency in the Perturbation Theory of the Real FERMI Gas, CERN, unveröffentlicht.

⁶ J. GOLDSTONE, unveröffentlicht.

⁷ G. LÜDERS, Z. Naturforsch. **14 a**, 1 [1959].

⁸ V. J. EMERY, Nucl. Phys. **12**, 69 [1959].

⁹ J. L. GAMMEL u. R. M. THALER, Phys. Rev. **107**, 291, 1337 [1957].

¹⁰ W. BRENIG, Z. Phys. **156**, 525 [1959].



EMERY und SESSLER¹¹ ist der Eigenwert einer (der B.G.Gl. entsprechenden) Gleichung aus der Theorie von BARDEEN, COOPER und SCHRIEFFER¹² numerisch für das GAMMEL-THALER-Potential berechnet worden.

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem lokalisierter Lösungen mit nicht-verschwindendem Gesamtmomentum behandelt. In Abschnitt 1 wird zunächst die allgemeine mathematische Formulierung mittels einer Entwicklung der Lösung nach Drehimpulsen gewonnen. In Abschnitt 2 werden die analytischen und numerischen Eigenschaften der lokalisierbaren Lösungen für den Sonderfall eines separierbaren Potentials angegeben. In Abschnitt 3 wird eine Lösung der Gleichung für ein Kastenpotential für kleinen Gesamtmomentum durchgeführt.

1. Allgemeine Formulierung

Für den HAMILTON-Operator h_0 der beiden freien Nukleonen in dem von den übrigen Teilchen erzeugten Potential [Gl. (1)] werde die Näherung der effektiven Masse gemacht, d. h. in der Impulsdarstellung gelte

$$h_0 = \frac{1}{2m^*} (k_1^2 + k_2^2). \quad (2)$$

Aus der vorauszusetzenden Translations- und GALILEI-Invarianz der Wechselwirkung folgt, daß das Zwei-Nukleonen-Potential in der Form

$$\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | v | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle = \langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}' \rangle \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \quad (3)$$

geschrieben werden kann; dabei wurden Gesamtimpuls \mathbf{K} und Relativimpuls \mathbf{k} eingeführt durch

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{K}, \quad \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = 2\mathbf{k}. \quad (4)$$

In diesen neuen Variablen läßt sich nicht nur der HAMILTON-Operator [Gl. (2)], sondern auch der Projektionsoperator $P(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ formulieren; ohne daß die Gefahr eines Mißverständnisses befürchtet

$$\langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}' \rangle = 4\pi \sum_l g_l(k, k') P_l(\cos \Theta) = 4\pi \sum_{l,m} g_l(k, k') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (10)$$

Hierbei ist P_l ein LEGENDRE-Polynom und Θ der Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{k} und \mathbf{k}' (Drehinvarianz des Potentials!), während ϑ, φ bzw. ϑ', φ' die Polarwinkel der Vektoren \mathbf{k} und \mathbf{k}' sind.

Einsetzen der Gln. (8), (9) und (10) in Gl. (7) und Integration über den Winkelanteil von \mathbf{k}' gibt

$$\begin{aligned} \sum_l (K^2/4m^* + k^2/m^* - \varepsilon) \chi_{l\mu}^K(k) Y_{l\mu}(\vartheta, \varphi) \\ = - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l'} \sum_{l''} \text{gerade } P_{l'}^K(k) Y_{l'0}(\vartheta, \varphi) Y_{l''\mu}(\vartheta, \varphi) \int_0^\infty g_{l''}(k, k') \chi_{l''\mu}^K(k') k'^2 dk'. \end{aligned} \quad (11)$$

¹¹ V. J. EMERY u. A. M. SESSLER, Phys. Rev. **119**, 248 [1960].

zu werden braucht, werde er in der Form $P(\mathbf{K}, \mathbf{k})$ geschrieben mit der Erläuterung: $P(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = 1$ für $|\mathbf{k} + \mathbf{K}/2|, |\mathbf{k} - \mathbf{K}/2| \geq k_f$ und $= 0$ sonst.

Als Lösung der B.G.Gl. werde jetzt eine Funktion festen Gesamtmomentums \mathbf{K} angesetzt

$$Y(\mathbf{K}', \mathbf{k}) = \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}'); \quad (5)$$

in der Wellenfunktion $\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k})$ spielt \mathbf{K} die Rolle eines Parameters. Durch Einsetzen von Gl. (5) in die B.G.Gl. findet man unter Verwendung der Gln. (2), (3) und (4) für die Funktion $\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k})$ die Gleichung

$$(K^2/4m^* + k^2/m^* - \varepsilon) \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) = - \frac{P(\mathbf{K}, \mathbf{k})}{(2\pi)^3} \int \langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}' \rangle \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (7)$$

Während die \mathbf{K} -Abhängigkeit der linken Seite (Energie der Schwerpunktbewegung) harmlos ist, tritt im Projektionsoperator eine viel einschneidender Abhängigkeit auf. Es sei angemerkt, daß $P(\mathbf{K}, \mathbf{k})$ nur für $\mathbf{K} = 0$ drehinvariant bezüglich \mathbf{k} ist; dies ist der Grund für die rechnerischen Komplikationen, die bei $\mathbf{K} \neq 0$ auftreten.

Der Projektionsoperator $P(\mathbf{K}, \mathbf{k})$ hängt gemäß seiner Definition nur von den Beträgen der Vektoren \mathbf{K} und \mathbf{k} und vom Winkel ϑ zwischen den beiden Vektoren ab; man kann deshalb nach normierten Kugelfunktionen entwickeln

$$P(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = \sum_l P_l^K(k) Y_{l0}(\vartheta, \varphi) \equiv P_K(k, \vartheta). \quad (8)$$

Da $P_K(k, \vartheta)$ eine gerade Funktion von ϑ ist, treten nur gerade l auf.

Nunmehr soll die Wellenfunktion $\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k})$ nach Drehimpulsen (Partialwellen) entwickelt werden

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) = \sum_l \chi_{l\mu}^K(k) Y_{l\mu}(\vartheta, \varphi). \quad (9)$$

Ferner werde das Potential $\langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}' \rangle$ nach normierten Kugelfunktionen entwickelt

$$\langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}' \rangle = 4\pi \sum_{l,m} g_l(k, k') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (10)$$

¹² J. BARDEEN, L. N. COOPER u. J. SCHRIEFFER, Phys. Rev. **108**, 1175 [1957].

Jetzt wird Gebrauch gemacht von der Beziehung

$$Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) Y_{l'm''}(\vartheta, \varphi) = \sum_L \sum_M \left[\frac{(2l'+1)(2l''+1)}{4\pi(2L+1)} \right]^{1/2} \langle l'l''00 | L0 \rangle \langle l'l'm'm'' | LM \rangle Y_{LM}(\vartheta, \varphi), \quad (12)$$

wobei $\langle l'l'm'm'' | LM \rangle$ ein CLEBSCH-GORDAN-Koeffizient ist. An Stelle von $Y_{l'0}(\vartheta, \varphi) Y_{l''\mu}(\vartheta, \varphi)$ wird Gl. (12) in Gl. (11) eingesetzt und durch Vergleich der Koeffizienten der Kugelfunktionen auf beiden Seiten der Gl. (11) erhält man schließlich

$$(K^2/4 m^* + k^2/m^* - \varepsilon) \chi_{l\mu}^K(k) = - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{l \\ \text{gerade}}} \sum_{l'} \left[\frac{(2l'+1)(2l''+1)}{4\pi(2l+1)} \right]^{1/2} \langle l'l''00 | l0 \rangle \langle l'l''0\mu | l\mu \rangle P_l^K(k) \int_0^\infty g_{l''}(k, k') \chi_{l'\mu}^K(k') k'^2 dk'. \quad (13)$$

Das Gleichungssystem koppelt Partialwellen zu verschiedenen Drehimpulsen; das ist eine Folge der fehlenden Rotationssymmetrie der rechten Seite der Gl. (7). Bei geraden Werten von l' ist der CLEBSCH-GORDAN-Koeffizient $\langle l'l''00 | l0 \rangle$ nur von Null verschieden, falls die Summe $l+l''$ eine gerade Zahl ist. Deshalb sind nur Partialwellen mit geraden bzw. ungeraden Drehimpulsen gekoppelt. Es sollte angemerkt werden, daß eine ähnliche Entwicklung der B.G.Gl. (aber im Koordinaten-Raum) von WERNER¹³ durchgeführt worden ist.

Zur Bestimmung der Funktion $P_l^K(k)$ werde eine geometrische Betrachtung gemacht. Um die beiden Endpunkte des Vektors \mathbf{K} werden zwei Kugeln mit dem Radius k_f beschrieben (Abb. 1). Von dem Mittelpunkt des Vektors \mathbf{K} wird dann der Vektor \mathbf{k} abgetragen. Aus der Definition des Projektionsoperators folgt: $P(\mathbf{K}, \mathbf{k})$ verschwindet, wenn der Endpunkt von \mathbf{k} innerhalb der Kugeln liegt, und ist gleich eins, wenn er außerhalb liegt. Offenbar unterscheidet man zweckmäßig, ob die beiden Kugeln völlig getrennt sind oder nicht; deshalb werden im folgenden die beiden Bereiche $K \leq 2k_f$ und $K > 2k_f$ zu unterscheiden sein.

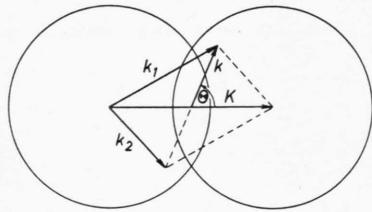


Abb. 1. Geometrische Veranschaulichung der Funktion $P(\mathbf{K}, \mathbf{k})$.
Der Radius der beiden Kugeln ist k_f .

Aus Abb. 1 entnimmt man, daß gilt

im Fall $K \leq 2k_f$

$$\begin{aligned} P_K(k, \vartheta) &= 0 \quad \text{für} \quad k < (k_f^2 - K^2/4)^{1/2}, \\ &= 0 \quad \text{für} \quad (k_f^2 - K^2/4)^{1/2} \leq k < (k_f + K/2); \quad 0 < \vartheta < \bar{\Theta}_K(k) \quad \text{oder} \quad \pi - \bar{\Theta}_K(k) < \vartheta < \pi \\ &= 1 \quad \text{für} \quad (k_f^2 - K^2/4)^{1/2} \leq k < (k_f + K/2); \quad \bar{\Theta}_K(k) \leq \vartheta \leq \pi - \bar{\Theta}_K(k) \\ &= 1 \quad \text{für} \quad (k_f + K/2) \leq k; \end{aligned} \quad (14)$$

im Fall $K > 2k_f$

$$\begin{aligned} P_K(k, \vartheta) &= 1 \quad \text{für} \quad k \leq (K/2 - k_f), \\ &= 0 \quad \text{für} \quad (K/2 - k_f) < k < (K/2 + k_f); \quad 0 < \vartheta < \bar{\Theta}_K(k) \quad \text{oder} \quad \pi - \bar{\Theta}_K(k) < \vartheta < \pi \\ &= 1 \quad \text{für} \quad (K/2 - k_f) < k < (K/2 + k_f); \quad \bar{\Theta}_K(k) \leq \vartheta \leq \pi - \bar{\Theta}_K(k) \\ &= 1 \quad \text{für} \quad (K/2 + k_f) \leq k; \end{aligned} \quad (15)$$

der Winkel $\bar{\Theta}_K(k)$ ist dabei definiert durch $\cos \bar{\Theta}_K(k) = \left| \frac{k_f^2 - K^2/4 - k^2}{K k} \right|$. (16)

¹³ E. WERNER, Nucl. Phys. **10**, 688 [1959].

Die Funktionen $\mathcal{P}_l^K(k)$ in Gl. (8) bestimmt man nun, indem man $\mathcal{P}_K(k, \vartheta)$ mit $Y_{l0}(\vartheta, \varphi)$ multipliziert und unter Verwendung von Gl. (14) bzw. (15) über ϑ und φ integriert; hierbei verwendet man die Beziehung

$$(2l+1)P_l^0(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{dP_{l-1}^0(\cos \vartheta)}{d\vartheta} - \frac{dP_{l+1}^0(\cos \vartheta)}{d\vartheta}. \quad (17)$$

Es ergibt sich im Fall $K \leq 2k_f$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_l^K(k) &= 0 \quad \text{für } k < (k_f^2 - K^2/4)^{1/2}, \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2l+1} \right)^{1/2} [P_{l+1}^0(\cos \bar{\Theta}_K(k)) - P_{l-1}^0(\cos \bar{\Theta}_K(k))] \\ &\quad \text{für } (k_f^2 - K^2/4)^{1/2} \leq k \leq (k_f + K/2) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mathcal{P}_2^K(k) = 2\pi^{1/2} \quad \text{für } (k_f + K/2) \leq k;$$

im Fall $K > 2k_f$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^K(k) &= 2\pi^{1/2} \quad \text{für } k \leq (K/2 - k_f), \\ \mathcal{P}_l^K(k) &= 2 \left(\frac{\pi}{2l+1} \right)^{1/2} [P_{l+1}^0(\cos \bar{\Theta}_K(k)) - P_{l-1}^0(\cos \bar{\Theta}_K(k))] \\ &\quad \text{für } (K/2 - k_f) < k < (k_f + K/2), \\ \mathcal{P}_0^K(k) &= 2\pi^{1/2} \quad \text{für } (k_f + K/2) \leq k. \end{aligned} \quad (19)$$

2. Lösung der B.G.Gl. für ein separierbares Potential

a) Allgemeine Diskussion

Die Lösung von Gl. (13) ist im allgemeinen schwierig, da man ein unendliches System gekoppelter Gleichungen lösen muß. Eine exakte Lösung ist jedoch möglich, wenn wir annehmen, daß das Potential separierbar sei

$$\langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}' \rangle = -4\pi\gamma g^*(k) g(k'), \quad (20)$$

wobei γ die Stärke des Potentials ist und für anziehendes bzw. abstoßendes Potential positives bzw. negatives Vorzeichen hat. Im Sinne der Gl. (10) bedeutet dies

$$g_0(k, k') = -\gamma g^*(k) g(k'), \quad g_l(k, k') = 0 \quad (l > 0).$$

Damit erhält man aus Gl. (13) für $l = \mu = 0$ die ungekoppelte Gleichung

$$(K^2/4 + k^2 - m^* \varepsilon) \chi_{00}^K(k) = -\frac{m^* \gamma}{\pi^{3/2}} \mathcal{P}_0^K(k) g^*(k) \int_0^\infty g(k') \chi_{00}^K(k') k'^2 dk'. \quad (21)$$

Es gibt zwar auch Gleichungen für $\chi_{l0}^K(k)$, aber diese definieren kein Eigenwertproblem. Offenbar kann man setzen

$$\chi_{00}^K(k) = C_K \frac{\mathcal{P}_0^K(k) g^*(k)}{k^2 + K^2/4 - m^* \varepsilon}, \quad (22)$$

wobei die Konstante C_K durch
$$C_K = \frac{m^* \gamma}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty g(k') \chi_{00}^K(k') k'^2 dk' \quad (23)$$

gegeben ist. Die Wellenfunktion ist durch das Potential vollständig definiert. Indem man Gl. (22) in Gl. (23) einsetzt, erhält man das Eigenwertproblem in der Form

$$1 = \frac{m^* \gamma}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{|\mathcal{P}_0^K(k)|^2 g(k)|^2 k^2 dk}{k^2 + K^2/4 - m^* \varepsilon}. \quad (24)$$

Bei Verwendung eines separierbaren Potentials gelten einige einfache Sätze:

1. Für abstoßendes Potential ($\gamma < 0$) gibt es keinen lokalisierten Zustand; die weiteren Sätze beziehen sich daher auf anziehendes Potential ($\gamma > 0$).

2. Für anziehendes Potential gibt es zu gegebenem Gesamtimpuls K keinen oder genau einen lokalisierten Zustand.

3. Für $K = 0$ gibt es einen lokalisierten Zustand; hierbei ist $g(k_f) \neq 0$ und hinreichend glattes Verhalten von $g(k)$ in der Umgebung von $k = k_f$ vorausgesetzt.

4. Es gibt ein \hat{K} mit der Eigenschaft, daß ein lokalisierte Zustand existiert für $0 \leq K < \hat{K}$ und keiner für $\hat{K} \leq K \leq 2k_f$ (dabei kann aber $\hat{K} = 2k_f$ sein).

5. Es gibt ein \hat{K} mit der Eigenschaft, daß ein lokalisierte Zustand existiert für $\hat{K} < K < \infty$ und keiner für $2k_f \leq K \leq \hat{K}$ (wobei aber $\hat{K} = 2k_f$ sein kann).

Zum Beweis werde für das in Gl. (24) auftretende Integral als Funktion von $m^* \varepsilon$ und K die Abkürzung

$$\Omega(m^* \varepsilon, K) = \frac{m^* \gamma}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}_0^K(k) |g(k)|^2 k^2 dk}{k^2 + K^2/4 - m^* \varepsilon} \quad (25)$$

eingeführt; die Eigenwertbedingung lautet dann

$$\Omega(m^* \varepsilon, K) = 1. \quad (26)$$

Satz 1 folgt daraus, daß $\Omega(m^* \varepsilon, K) < 0$ für $\gamma < 0$; Bedingung (26) kann für abstoßendes Potential also nie erfüllt werden. **Satz 2** beweist man aus der Bemerkung, daß für $\gamma > 0$ gilt

$$\frac{\partial \Omega(m^* \varepsilon, K)}{\partial (m^* \varepsilon)} = \frac{m^* \gamma}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}_0^K(k) |g(k)|^2 k^2 dk}{(k^2 + K^2/4 - m^* \varepsilon)^2} > 0. \quad (27)$$

Gl. (26) wird also bei gegebenem K höchstens für ein $m^* \varepsilon$ erfüllt. Um festzustellen, ob wirklich ein lokalisierte Zustand auftritt, braucht man nur zu untersuchen, ob $\Omega(m^* \varepsilon, K) > 1$ oder < 1 bei dem jeweils größten möglichen Wert von $m^* \varepsilon$. Dabei gilt im Impulsintervall $0 \leq K \leq 2k_f$, daß $m^* \varepsilon \leq k_f^2$ zu sein

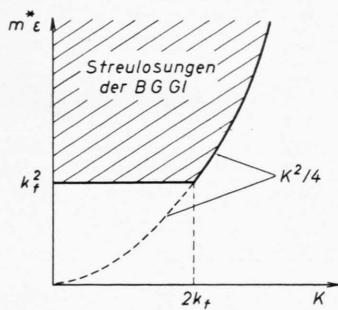


Abb. 2. Lage der Streulösungen der B.G.Gl. Lokalisierte Lösungen existieren nur im unschraffierte Bereich.

hat, während im Intervall $2k_f \leq K < \infty$ gelten muß $m^* \varepsilon \leq K^2/4$; diese Bemerkung folgt daraus, daß die Energie des lokalisierten Zustandes niedriger liegt als die Energie aller Streuzustände gleichen Gesamtimpulses mit beiden Teilchenimpulsen außerhalb der FERMI-Kugel⁷ (siehe Abb. 2). Für $K=0$ gilt $\Omega(k_f^2, 0) = \infty$ ⁵; daraus folgt **Satz 3**. **Satz 4** folgt daraus, daß

$$\frac{\partial \Omega(k_f^2, K)}{\partial K} = -\frac{2m^* \gamma}{\pi} \left\{ \frac{K}{2} \int_{k_f+K/2}^\infty \frac{|g(k)|^2 k^2 dk}{(k^2 + K^2/4 - k_f^2)^2} + \frac{1}{K^2} \int_{(k_f-K/4)^{1/2}}^{k_f+K/2} |g(k)|^2 k dk + \frac{(k_f^2 - K^2/4)^{1/2} |g[(k_f^2 - K^2/4)^{1/2}]|^2}{K} \right\} < 0; \quad (28)$$

der Impuls \hat{K} ist durch die Bedingung $\Omega(k_f^2, K) = 1$ bestimmt. **Satz 5** gewinnt man aus der Bemerkung, daß aus

$$\Omega(K^2/4, K) = \frac{2m^* \gamma}{\pi} \left\{ \int_0^{K/2-k_f} |g(k)|^2 dk + \int_{K/2-k_f}^{K/2+k_f} \left(\frac{K^2/4 + k^2 - k_f^2}{K k} \right) |g(k)|^2 dk + \int_{K/2+k_f}^\infty |g(k)|^2 dk \right\} \quad (29)$$

folgt

$$\frac{d\Omega(K^2/4, K)}{dK} = \frac{2 m^* \gamma}{\pi} \int_{K/2-k_f}^{K/2+k_f} \left(\frac{k_f^2 + K^2/4 - k^2}{K^2 k} \right) |g(k)|^2 dk > 0 \quad (30)$$

(gewöhnliche Differentiation!); die Ungleichung folgt bei Beachtung der oberen Integrationsgrenze. Die Größe \hat{K} ist durch die Bedingung $\hat{\Omega}(\hat{K}^2/4, \hat{K}) = 1$ bestimmt.

b) Numerische Rechnung

Die Funktion $g(k)$ soll in der Form

$$g(k) = 1/(k^2 + \beta^2) \quad (31)$$

angesetzt werden. In einer Arbeit von YAMAGUCHI¹⁴ ist die gleiche Form für $g(k)$ angenommen und das Deuteron-Problem und das Streuproblem für zwei Nukleonen im freien Raum untersucht worden. Es wurden hier die Größen β und γ nach der Methode dieser Arbeit bestimmt. Dazu wurden die experimentellen Größen nach dem neuesten Stand der Messungen benutzt. Aus der Arbeit von PHILLIPS¹⁵ hat man für die Streulängen $a_t = 5,38 \cdot 10^{-13}$ cm, $a_s = -23,69 \cdot 10^{-13}$ cm und für die effektiven Reichweiten $r_{ot} = 1,70 \cdot 10^{-13}$ cm, $r_{os} = 2,40 \cdot 10^{-13}$ cm. Es wurde für m der Wert 939 MeV, für m^* der Wert 0,75 m benutzt. Damit erhält man für den Triplett-Zustand 3S_1

$$m \gamma_t = 8,24 \cdot 10^{-39} \text{ cm}, \quad \beta_t = 1,45 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-1}, \quad (32)$$

und für den Singulett-Zustand 1S_0

$$m \gamma_s = 3,93 \cdot 10^{-39} \text{ cm}, \quad \beta_s = 1,28 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-1}. \quad (33)$$

Es wird nur der Fall $K \leq 2 k_f$ betrachtet. $m^* \varepsilon$ soll als Funktion von K aus Gl. (24) gewonnen werden. Im Bereich $K \leq 2 k_f$ lautet Gl. (24) folgendermaßen

$$\frac{\pi}{2 m^* \gamma} = \int_{k_f + K/2}^{\infty} \frac{k^2 dk}{(k^2 + \beta^2)^2 (k^2 + K^2/4 - m^* \varepsilon)} - \int_{(k_f^2 - K^2/4)^{1/2}}^{k_f + K/2} \frac{k^2 dk}{(k^2 + \beta^2)^2 (k^2 + K^2/4 - m^* \varepsilon)}. \quad (34)$$

Es ist zweckmäßig, folgende Substitutionen zu machen: $K/2 k_f = \varrho$; $\beta/k_f = \xi$; $m^* \varepsilon = k_f^2 (1 - \Delta(\varrho))$. Mit diesen Substitutionen und nach Durchführung der Integration über k erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\pi k_f^3}{m^* \gamma} = & \frac{(\xi^2 - 1 + \Delta(\varrho) + \varrho^2)}{\xi(1 + \xi^2 - \Delta(\varrho) - \varrho^2)^2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \left(\frac{1 + \varrho}{\xi} \right) \right] - \frac{(1 - \Delta(\varrho) - \varrho^2)^{1/2}}{(1 + \xi^2 - \Delta(\varrho) - \varrho^2)^2} \ln \left[\frac{1 + \varrho - (1 - \Delta(\varrho) - \varrho^2)^{1/2}}{1 + \varrho + (1 - \Delta(\varrho) - \varrho^2)^{1/2}} \right] \\ & + \frac{\Delta(\varrho)}{2 \varrho (1 + \xi^2 - \Delta(\varrho) - \varrho^2)^2} \ln \left[\left(\frac{(1 + \varrho)^2 + \xi^2}{1 - \varrho^2 + \xi^2} \right) \left(\frac{\Delta(\varrho)}{2 \varrho + \varrho^2 + \Delta(\varrho)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Es werde angenommen, daß für $\varrho \ll 1$ eine Lösung der Gl. (35) dicht unterhalb der doppelten FERMI-Energie liegt, d. h. $\Delta(\varrho) \ll 1$. Man kann dann Gl. (35) approximieren und bekommt

$$\Delta(\varrho) \cong 4 e^{-\mu} \left(\frac{2 \varrho}{\Delta(\varrho)} + 1 \right) - \left(\frac{\Delta(\varrho)}{2 \varrho} + 1 \right) \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{\pi k_f^3 (1 + \xi^2)}{m^* \gamma} - \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{\xi} \right). \quad (36)$$

Man erhält also eine transzendentale Gleichung für $\Delta(\varrho)$. Im Grenzfall $\varrho \ll \Delta(\varrho)$ wird Gl. (36)

$$\Delta(\varrho) \cong 4 e^{-(\mu+1)} - 2 \varrho. \quad (37)$$

Also fängt $\Delta(\varrho)$ linear in ϱ an mit $d\Delta/d\varrho = -2$. Man bekommt für

$$\alpha) \quad {}^3S_1\text{-Zustand:} \quad \mu = 5,84; \quad \Delta(0) = 0,428 \cdot 10^{-2}; \quad \varepsilon(0) = 0,434 \text{ MeV};$$

$$\beta) \quad {}^1S_0\text{-Zustand:} \quad \mu = 9,84; \quad \Delta(0) = 0,78 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon(0) = 83 \text{ keV};$$

wobei $\Delta(0)$ gut mit der Annahme $\Delta(\varrho) \ll 1$ übereinstimmt.

¹⁴ Y. YAMAGUCHI, Phys. Rev. **109**, 1023 [1954].

¹⁵ R. J. PHILLIPS, The Two-Nucleon-Interaction, Rep. Progr. in Physics **22** [1959].

Nimmt man weiter an, daß die Lösung Δ für ein $\varrho \ll 1$ ($K \ll 2 k_f$) verschwindet, so kann man aus Gl. (36) den Wert von ϱ ausrechnen, der der Stelle $\Delta=0$ entspricht. Läßt man in Gl. (36) Δ nach Null gehen, so erhält man

$$\hat{\varrho} \cong 2 e^{-\mu}. \quad (38)$$

Man bekommt für $\hat{\varrho}$ mit den Potentialparametern aus Gl. (33) und (34) :

a) 3S_1 -Zustand: $\hat{\varrho} = 5,8 \cdot 10^{-3}$.

Dies entspricht einer Schwerpunktsenergie von $\hbar^2 K^2 / 4 m^* = 3,54$ keV.

b) 1S_0 -Zustand: $\hat{\varrho} = 10^{-4}$; $\hbar^2 K^2 / 4 m^* = 1,1$ eV.

Diese Werte sind konsistent mit der Annahme $\varrho \ll 1$.

Die in Gl. (36) angegebene Beziehung zwischen Δ und ϱ ist in Abb. 3 aufgetragen. Es sind drei Dinge bei der Abbildung zu bemerken:

- a) Daß $\Delta(\varrho)$ bei $\varrho \ll \hat{\varrho}$ mit einer Steigerung vom Wert -2 anfängt, macht sich nicht bemerkbar, da der Gültigkeitsbereich von Gl. (37) sehr klein ist.
- b) Um $\varrho = \hat{\varrho}$ geht $\Delta(\varrho)$ tangential nach 0 .
- c) Man könnte $\Delta(\varrho)$ im Lösungsbereich durch eine gerade Linie approximieren.

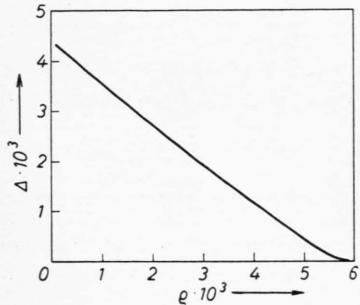


Abb. 3. Abstand der Energie der lokalisierteren Lösung der B.G.Gl. von der doppelten FERMI-Energie für den 3S_1 -Zustand als Funktion des Gesamtimpulses (K) für separierbares Potential.

3. Lösung der B.G.Gl. für ein Kastenpotential

Wir wissen jetzt, daß $\varepsilon(\varrho)$ für ein separierbares Potential dicht unterhalb der doppelten FERMI-Energie liegt und bei einem kleinen Gesamtimpuls $\hat{\varrho} \ll 1$ verschwindet. Wir wollen annehmen, daß $\varepsilon(\varrho)$ das gleiche Verhalten bei einem lokalen Potential hat, und zwar wollen wir das Problem für S-Wellen im Falle eines Kastenpotentials betrachten. Dazu schreiben wir Gl. (13) für S-Wellen unter Weglassung der Kopplungsglieder

$$(k^2 + K^2/4 - m^* \varepsilon) \chi_{00}^K(k) = - \frac{P_0^K(k)}{4 \pi^{3/2}} \int_0^\infty g_{00}(k, k') \chi_{00}^K(k') dk', \quad (39)$$

wobei jetzt gilt $g_{00}(k, k') = 4 \pi \int_0^\infty \sin k r v(r) \sin k' r dr \equiv 4 \pi v(k, k')$.

Es werde eine neue langsamer veränderliche Wellenfunktion $\tilde{\chi}_K(k)$ eingeführt durch

$$\chi_{00}^K(k) = \frac{P_0^K(k) \tilde{\chi}_K(k)}{(m^* \varepsilon - k^2 - K^2/4)}. \quad (40)$$

Dann erhält man aus Gl. (39)

$$\tilde{\chi}_K(k) = \frac{m^*}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{v(k, k') P_0^K(k') \tilde{\chi}_K(k') dk'}{(m^* \varepsilon - k'^2 - K^2/4)}. \quad (41)$$

Wie in Abschnitt 2 setzen wir $m^* \varepsilon = k_f^2 (1 - \Delta(\varrho))$, wobei $\Delta(\varrho) \ll 1$ bei $\varrho \ll 1$. Dann wird die Näherung $v(k, k') \cong v(k, k_f)$ gemacht (wie bei BRENIK¹⁰). Diese Näherung ist nur gültig, wenn das Potential eine kurze Reichweite hat. Dann ist $v(k, k')$ eine langsam veränderliche Funktion von k bzw. k' . $\tilde{\chi}_K(k)$ soll in der Nähe von $k = k_f$ nicht zu schnell veränderlich sein. Jetzt kann man setzen

$$\tilde{\chi}_K(k) = C_K v(k, k_f), \quad (42)$$

$$\text{wobei gilt } C_K = \frac{m^*}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}_0^K(k) \tilde{\chi}_K(k') dk'}{(m^* \varepsilon - k'^2 - K^2/4)}. \quad (43)$$

Setzt man Gl. (42) in (43) ein und macht man nochmal die gleiche Näherung, so bekommt man im Bereich $K \leqq 2 k_f$ als Gleichung für $\Delta(\varrho)$

$$\frac{\pi}{2 m^* v(k_f, k_f)} = \int_{k_f + K/2}^\infty \frac{dk}{k_f^2 (1 - \Delta(\varrho)) - k^2 - K^2/4} - \int_{(k_f^2 - K^2/4)^{1/2}}^{k_f + K/2} \frac{dk}{\left(\frac{k_f^2 - K^2/4 - k^2}{K k} \right) k_f^2 (1 - \Delta(\varrho)) - k^2 - K^2/4}. \quad (44)$$

Nach Integration über k erhält man näherungsweise

$$\Delta(\varrho) \cong 4 \left(\frac{2 \varrho}{\Delta(\varrho)} + 1 \right) \left(\frac{\Delta(\varrho)}{2 \varrho} + 1 \right) \exp \left\{ \frac{\pi k_f}{m^* v(k_f, k_f)} + 1 \right\}. \quad (45)$$

Dieser Ausdruck entspricht genau Gl. (36), wenn dort $\mu = - \left(\frac{\pi k_f}{m^* v(k_f, k_f)} + 1 \right)$ gesetzt wird.

Für $\varrho \ll \Delta(\varrho)$ gilt wieder näherungsweise Gl. (37); ferner folgt für $\hat{\varrho}$ Gl. (38).

Wir wollen diese Resultate numerisch mit den Resultaten für das separierbare Potential vergleichen. Hierzu ist es nur nötig, die Größe μ in beiden Fällen numerisch zu berechnen. Wir benutzen als Kastenpotential:

$$v(r) = \begin{cases} -v_0 & \text{für } r \leqq r_0, \\ 0 & \text{für } r > r_0, \end{cases} \quad \text{wo } v_0 = \pi^2 / 4 m r_0^2.$$

Der Wert von r_0 sei für den 3S_1 -Zustand gleich $1,7 \cdot 10^{-13}$ cm und für den 1S_0 -Zustand gleich $2,4 \cdot 10^{-13}$ cm gewählt¹⁵. Mit diesen Werten erhalten wir für $\mu_t = 5,6$ und für $\mu_s = 10,9$, die gut mit den entsprechenden Werten für das separierbare Potential [siehe Gl. (37)] übereinstimmen.

Für die Anregung zu diesem Thema und die ständige Bereitschaft, Schwierigkeiten zu diskutieren, bin ich Herrn Professor Dr. G. LÜDERS sehr dankbar. Für hilfreiche Diskussionen möchte ich Herrn Professor Dr. W. BRENIK meinen Dank aussprechen.